ماتریس

تعریف ماتریس و مرتبه ماتریس

یک ماتریس $m \times n$ مستطیلی از اعداد است که دارای m سطر و n ستون است و صورت $A_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود.

هر عدد را یک درایه می‌نامیم و با توجه به سطر و ستون آن به صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

- ✓ دو ماتریس را هم مرتبه می‌نامیم هرگاه تعداد سطر و ستون آنها برابر باشد.
- ✓ دو ماتریس با هم برابرند اگر همه‌ی درایه های آنها نظیر به نظیر برابر باشند.
- ✓ ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطر ها و ستون های آن برابر باشد

و این عدد را مرتبه‌ی ماتریس می‌گوییم.

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

ماتریس های خاص

- ✓ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد مرتبه آن $m \times 1$ است
- ✓ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد مرتبه آن $1 \times n$ است.
- ✓ ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه های آن صفر است. معمولا با $O_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود
- ✓ ماتریس واحد: ماتریسی که درایه های روی قطر اصلی آن همگی برابر ۱ و بقیه درایه ها صفر باشند و معمولا با $I_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود.
- ✓ ماتریس قطری: ماتریسی که همه‌ی درایه های آن جز درایه های قطر اصلی صفر باشند.

اعمال روی ماتریس

جمع و تفریق: دو ماتریس در صورتی که هم مرتبه باشند میتوانند با هم جمع یا تفریق شوند و برای این کار درایه های نظیر به نظیر با هم جمع و یا از هم کم می‌شوند.

ضرب عدد در ماتریس: عدد در تمامی درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود و برعکس می‌توان از تمامی درایه های ماتریسی عددی را فاکتور گرفت.

قرینه یک ماتریس: ماتریس که تک تک درایه های آن قرینه درایه های ماتریس اولیه باشد.

ضرب دو ماتریس

حاصل‌ضرب ماتریس A در ماتریس B فقط زمانی ممکن است که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطر های ماتریس B برابر باشد.

$$A_{m\times n} \quad \times \quad B_{n\times k} \quad = \quad C_{m\times k}$$

طریقه ضرب:

$$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underbrace{[a\quad b]\begin{bmatrix}e\\g\end{bmatrix}}_{\text{سطر اول ضرب درستون اول}} & \underbrace{[a\quad b]\begin{bmatrix}f\\h\end{bmatrix}}_{\text{سطر اول ضرب درستون دوم}}\\ \underbrace{[c\quad d]\begin{bmatrix}e\\g\end{bmatrix}}_{\text{سطر دوم ضرب درستون اول}} & \underbrace{[c\quad d]\begin{bmatrix}f\\h\end{bmatrix}}_{\text{سطر دوم ضرب درستون دوم}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$$

اگر $C = A \times B$ ، آنگاه:

$C_{ij} =$ سطر iام ماتریس A $\times$ ستون jام ماتریس B

✓ نکته خیلی مهم: ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد!!!!

دترمینان ماتریس ۲×۲

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس را با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

ویژگی های دترمینان

1) $|A^n| = |A|^n$

2) $|kA| = k^2|A| \ \rightarrow 2\times 2$ ماتریس

3) $|AB| = |A||B|$

4) $|A+B| \neq |A| + |B|$

5) $|I| = 1$

معکوس ماتریس ۲×۲

اگر دترمینان ماتریس A صفر نباشد معکوس آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

ویژگی های ماتریس وارون

- 1) $(A^{-1})^{-1}= A$
- 2) $(kA)^{-1}= \frac{1}{k}A^{-1}$
- 3) $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$
- 4) $(A^n)^{-1}= (A^{-1})^n$
- 5) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- 6) $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$
- 7) $(A \pm B)^{-1}\neq A^{-1} + B^{-1}$

حل دستگاه با ماتریس معکوس

هر دستگاه n معادله n مجهول را می‌توان به صورت ماتریسی بازنویسی کرد.

برای دستگاه دو معادله دو مجهول زیر داریم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \equiv AX = C$$

برای حل معادله فوق باید وارون ماتریس را از سمت چپ در دو طرف تساوی ضرب کنیم تا جواب بدست آید:

$$AX = C \xrightarrow{\text{از چپ } \times A^{-1}} X = A^{-1}C$$

$$XD = E \xrightarrow{\text{از راست } \times D^{-1}} X = ED^{-1}$$

شرط وجود جواب منحصر به فرد برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اینست که، $ab' - ba' \neq ۰$. زیرا ماتریس A باید وارون پذیر باشد و یعنی $\det A \neq ۰$.

✓ نکته: اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

✓ نکته: اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

نکات زیر را بخاطر بسپاریم:

۱) در ماتریس های قطری برای به توان رساندن ماتریس کافیست تک تک درایه هارا به توان برسانیم.

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{bmatrix}$$

۲) حالت خاص نکته بالا ماتریس همانی است $I^n = I$. ماتریس همانی عضو بی اثر ضرب ماتریسی است میتوانیم هرجا که نیاز بود و به هرتوانی که نیاز بود در ماتریس های دیگر ضرب کنیم.

۳) ضرب ماتریسی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد به جز در موارد خاص که میگوییم دو ماتریس تعویض پذیرند.

۴) ضرب ماتریس همانی با هر ماتریس تعویض پذیر است.

۵) اگر داشته باشیم $A \times B = I$ ، آنگاه $B = A^{-1}$

مهندس احسان معینی نژاد

- مدرس ریاضی و فیزیک کنکور
- مهندس مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف
- دانشجوی ارشد دانشگاه امیرکبیر
- رتبه برتر کنکور سال ۹۱
- دارنده درصد ۹۱ در درس ریاضی
- عضو انجمن استعدادهای درخشان

- مدرس *مجموعه صفر تا صد ریاضی تجربی*

برای دانلود کلیپ‌های آموزشی و تست‌زنی ریاضی تجربی و استفاده از ویس و مطالب مشاوره‌ای، عضو **کانال تلگرام** و **صفحه اینستاگرام** ما شوید:

@nokte_riazi

@nokte_riazi

www.noktezist.ir

09031237997