انتگرال و تابع اولیه

انتگرال‌گیری عمل عکس مشتق‌گیری است. یعنی در انتگرال‌گیری از تابع $f(x)$ به دنبال تابعی مانند $F(x)$ هستیم که مشتقش بشود تابع $f(x)$. به این تابع $F(x)$، تابع اولیه $f(x)$ می‌گوییم.

$$F'(x) = f(x)$$

با هر بار انتگرال گیری مقدار ثابتی مثل c هم خواهیم داشت. چون در مشتق گیری عددثابت حذف می‌شود

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

dx یعنی مشتق نسبت به x گرفته شده است.

مشتق انتگرال نامعین هر تابع، همان تابع را می‌دهد:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$$

هر تابع دارای بینهایت تابع اولیه است که اختلاف آنها عدد ثابتی است.

نکته: با توجه به اینکه $(F(ax+b))' = aF'(ax+b)$ با فرض خواهیم داشت:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{۱}{a}F(ax+b) + c$$

روابط انتگرال‌گیری:

روابط انتگرال دقیقا عکس روابط مشتق گیری است.

❖ $\int kf(x) = k\int f(x)dx$

❖ $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

❖ $\int dx = x + c$

❖ $\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{x+۱} + c \qquad n \neq -۱$

❖ $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a(n+۱)} + c \qquad n \neq -۱$

❖ $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-۱}{a}\cos(ax+b) + c \ \rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + c$

❖ $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{۱}{a}\sin(ax+b) + c \ \rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + c$

❖ $\int (1+\tan^2(ax+b))dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c \quad \to \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$

❖ $\int (1+\cot^2(ax+b))dx = \frac{-1}{a}\cot(ax+b)+c \quad \to \int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + c$

❖ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c \quad \to \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c$

❖ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c \quad \to \int e^x dx = e^x + c$

ساده سازی:

- با استفاده از اتحاد ها ، گویا کردن مخرج کسر و تفکیک کسر ها میتوان عبارات را ساده کرد سپس انتگرال گرفت.
- با استفاده از اتحاد های مثلثاتی عبارات شامل آنها را ساده کنیم سپس انتگرال بگیریم.

تغییر متغیر:

حالات کلی تر انتگرال گیری(با تغییر متغیر):

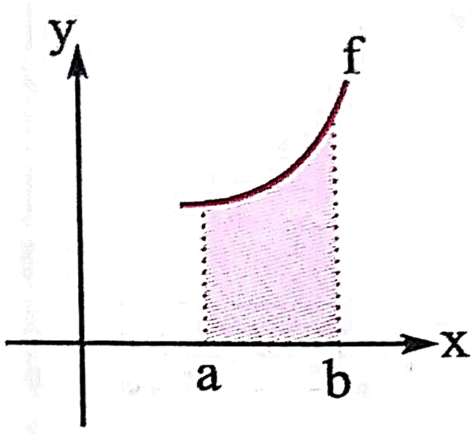
می‌توان با تابع مثل ایکس رفتار کرد

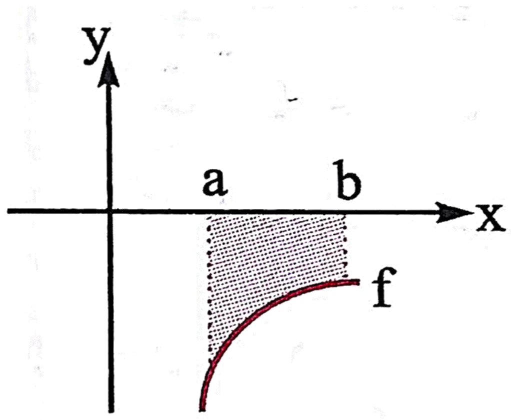
$$\int f\left(\text{تابع}\right) d\left(\text{تابع همان}\right) = F\left(\text{تابع}\right)$$

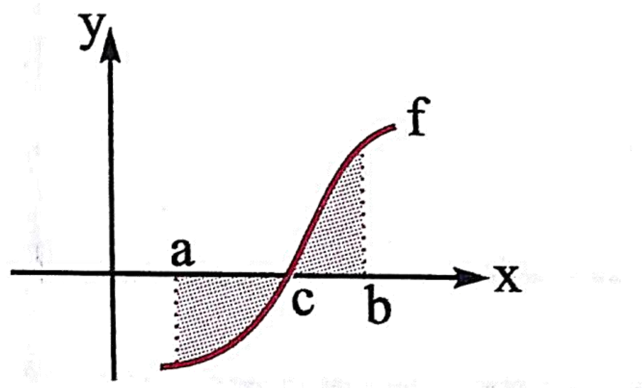
- $\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c \quad n \neq -1$
- $\int u' \sin u \ dx = -\cos u + c$
- $\int u' \cos u \ dx = \sin u + c$
- $\int u' (1+\tan^2 u)dx = \tan u + c$
- $\int u' (1+\cot^2 u)dx = -\cot u + c$

انتگرال معین و سطح زیر منحنی

- انتگرال معین تابع f در بازه $[a.b]$ برابر مساحت محصور بین نمودار (علامت دار) تابع و محور xها در آن بازه است. در واقع اگر تابع زیر محور x باشد مقدار انتگرال منفی ولی از نظر اندازه برابر مساحت بین تابع و محور x هاست.
- اگر دامنه تابع چند تکه بود و یا بعضی جاها ناپیوستگی داشت و یا علامت تابع عوض می‌شد، دامنه را به چندین بازه شکسته و تکه تکه انتگرال می‌گیریم.





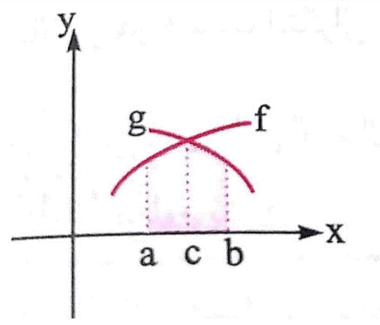


مساحت با وجود دوتابع:

اگر قسمتی از مساحت زیر یکی از تابع ها و قسمت دیگر زیر تابع دیگر بود مساحت جمع انتگرال های دو تابع خواهد بود.

❖ $f(x) = g(x) \rightarrow \quad x = c$

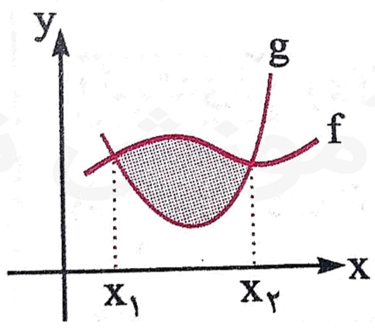
❖ $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$



اگر سطح بین دو تابع محصور باشد ، باید سطح زیر تابع بالایی ر از پایینی کم کنیم.

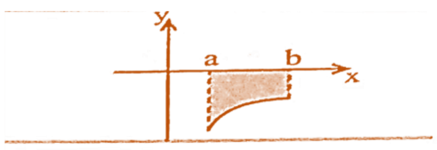
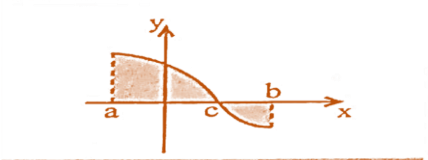
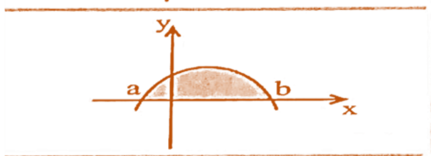
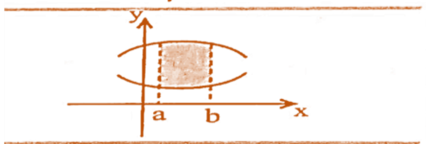
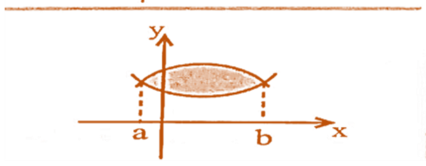
❖ $f(x) = g(x) \rightarrow \quad x_{۱} . x_{۲}$

❖ $S = \int_{x_{۱}}^{x_{۲}} (f(x) - g(x))dx$



مساحت هر طاق توابع $\sin x$ و $\cos x$ برابر ۲ واحد است.

مساحت هر طاق توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ برابر $\frac{۲}{|a|}$ واحد است.

	$S = \left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$
	$S = \left\|\int_a^c f(x)dx\right\| + \left\|\int_c^b f(x)dx\right\|$
	$S = \left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$
	$S = \left\|\int_a^b (y_{۲} - y_{۱})dx\right\|$
	$S = \left\|\int_a^b (y_{۲} - y_{۱})dx\right\|$

ویژگی های انتگرال معین:

۱) $\int_a^a f(x)dx = 0$

۲) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

۳) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

٤) $\int_a^b cdx = c(b-a)$

٥) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

٦) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

۷) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

۸) $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

قضیه اساسی اول:

اگر تابع f روی بازه I پیوسته و $a\epsilon I$ و برای هر $x\epsilon I$ داشته باشیم $F(x) = \int_a^x f(t)\,dx$ آنگاه:

$$F'(x) = f(x)$$

حالت کلی تر قضیه فوق به صورت زیر است:

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$$

قضیه اساسی دوم:

اگر تابع f در بازه بسته $[a.b]$ پیوسته باشد و تابع F به گونه‌ای باشد که برای هر x در این بازه F یک تابع اولیه برای باشد یعنی $F'(x) = f(x)$ ، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

به عبارتی از تابع انتگرال نامعین گرفته و سپس مقدار اختلاف حد بالا و پایین تابع را بدست می‌آوریم.

قدرمطلق و جزء صحیح:

- توابع شامل قدر مطلق: در این توابع باید قدر مطلق ها را تعیین علامت کنیم و به بازه انتگرال گیری را به بازه هایی تقسیم کنیم که ریشه های داخل قدر مطلق مرز بازه‌ها باشند
- توابع شامل جز صحیح: باید به بازه هایی تقسیم کنیم که عبارت داخل قدر مطلق یک عدد شود و جایی که مقدار براکت تغییر میکند، مرز بازه هاست

نکته: در بیشتر مواقع اگر نمودار شکل ساده باشد می‌توان از مساحت زیر نمودار استفاده کرد.

مهندس احسان معینی نژاد

- مدرس ریاضی و فیزیک کنکور
- مهندس مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف
- دانشجوی ارشد دانشگاه امیرکبیر
- رتبه برتر کنکور سال ۹۱
- دارنده درصد ۹۱ در درس ریاضی
- عضو انجمن استعدادهای درخشان

- مدرس *مجموعه صفر تا صد ریاضی تجربی*

برای دانلود کلیپ‌های آموزشی و تست‌زنی ریاضی تجربی و استفاده از ویس و مطالب مشاوره‌ای، عضو **کانال تلگرام** و **صفحه اینستاگرام** ما شوید:

@nokte_riazi

@nokte_riazi

www.noktezist.ir

09031237997